DURÉE : 4 heures

NOTATIONS

Soit x un nombre réel, on note $\bar{x}$ (resp. $\underline{x}$) le plus petit (resp. grand) entier $\geqslant x$ (resp $\leqslant x$).

Pour tout couple d'entiers (m, n) $(0 \leqslant m \leqslant n)$, on note $\binom{n}{m}$ le nombre $\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ dont on rappelle qu'il est un entier.

Pour tout réel positif x, on note $\mathrm{P}(x)$ l'ensemble des entiers *premiers* $p \leqslant x$ (ainsi $\mathrm{P}(x) = \varnothing$ pour $x < 2$, $\mathrm{P}(x) = \{2\}$ si $2 \leqslant x < 3$ ...) et $\sigma(x) = \prod_{p \in \mathrm{P}(x)} p$ le produit des éléments de $\mathrm{P}(x)$ avec la convention $\sigma(x) = 1$ pour $x < 2$.

Pour tout nombre premier p et tout entier n on désigne par $v_p(n)$ le plus grand entier i tel que p^i divise n ; en d'autres termes, $v_p(n)$ est l'exposant de p quand on écrit n sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers (exemples : $v_2(12) = 2$, $v_3(12) = 1$, $v_p(12) = 0$ si $p \neq 2$, $p \neq 3$ ...).

N.B. — *On indiquera lisiblement les numéros des questions traitées.*

I

(*Les questions* 1°, 2°, 3° *sont indépendantes*)

1° *a.* Prouver l'inégalité : $\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{2n-1}}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. Prouver que l'inégalité $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n-2}$ est vraie à partir d'un rang n_0 qu'on explicitera.

2° Soit q l'application associant à tout entier $n \geqslant 1$ le p. p. c. m. (plus petit commun multiple) des entiers $i \leqslant n$.

a. Calculer $q(n)$ pour $n = 1, 2, \ldots, 9$.

b. Prouver que, pour tout entier $n > 0$, le quotient

$$\frac{q(n+1)}{q(n)}$$

est un entier égal à 1 ou à un nombre premier dont $(n+1)$ est une puissance.

c. Déduire de *b.* la formule : $q(n) = \prod_{1 \leqslant i < i_0} \sigma(n^{\frac{1}{i}})$ où i_0 désigne un entier tel que $\sigma(n^{\frac{1}{i_0}}) = 1$.

3° Soient p un nombre premier et m, m' deux entiers. Prouver que $v_p(mm') = v_p(m) + v_p(m')$. En déduire que, si μ désigne le p. p. c. m. de m et m', on a : $v_p(\mu) = \sup(v_p(m), v_p(m'))$.

b. Soient p un nombre premier et n un entier ; pour tout entier $i > 0$, on désigne par M_i l'ensemble des multiples de p^i qui sont $\leqslant n$.

Prouver que $v_p(n!) = \sum_{1 \leqslant i < i_1} \text{cardinal } \mathrm{M}_i$, où i_1 désigne un entier tel que $\mathrm{M}_{i_1} = \varnothing$. En déduire que $v_p(n!) = \sum_{1 \leqslant i < i_1} \underline{\dfrac{n}{p^i}}$.

c. Soient u, v, w trois entiers ; prouver que :

$$\underline{\left(\frac{u+v}{w}\right)} - \underline{\left(\frac{u}{w}\right)} - \underline{\left(\frac{v}{w}\right)}$$

est un entier égal à 0 ou à 1.

Montrer que, si w divise u ou v, l'expression précédente est nulle.

d. Soient p, n, r trois entiers (p premier, $r \geqslant 0$, $n > 0$) tels que $n < p^r \leqslant 2n$. Déduire de *b.* et *c.* que p divise $\binom{2n}{n}$.

e. Soient p, r, k, n quatre entiers (p premier, $r \geqslant 0$, $0 < k \leqslant n$) tels que p^r divise $\binom{n}{k}$. Déduire de *b.* et *c.* que $p^r \leqslant n$.

4° *a.* Soient p, k, n trois entiers (p premier, $0 < k < n$). Déduire de 3° *c.* et 3° *e.* l'inégalité

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right) + \sup(v_p(n-k), v_p(k)) \leqslant v_p(q(n)).$$

En conclure que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $k\binom{n}{k}$ divise $q(n)$.

b. Déduire de *a.* et de 1° *a.* l'inégalité $q(2n) \geqslant 2^{2n-1}$ où n est un entier quelconque $\geqslant 1$.

II

(*La question* 2° *est indépendante du* I *et de* II, 1°.)

1° Déduire de (I, 2°) et de (I, 3°, *d.*) que, pour tout entier $n > 0$, $\dfrac{q(2n)}{q(n)}$ est un entier diviseur de $\binom{2n}{n}$.

2° Soit α l'application $x \longmapsto \overline{\left(\frac{x}{2}\right)}$, $\alpha^{(n)}$ est l'application composée $\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha$ (n fois α).

a. Prouver : $\alpha^{(n)}(x) = \overline{2^{-n}x}$ pour tout réel $x \geqslant 1$ et tout entier $n \geqslant 1$.

b. Déduire de *a.* l'inclusion $]1, x] \subset \bigcup_{n>0}]\,\alpha^{(n)}(x),\ 2\alpha^{(n)}(x)]$.

3° Déduire de 2° et de (I, 1°, *b.*) l'inégalité :

$$\text{pour } x > 2, \quad \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} \binom{2\,\alpha^{(i)}(x)}{\alpha^{(i)}(x)} \leqslant 4^{2\alpha(x)-2}$$

où m désigne l'entier tel que $\alpha^{(m-1)}(x) > 1$ et $\alpha^{(m)}(x) = 1$.

[On pourra raisonner par récurrence sur l'entier $\alpha(x)$].

4° Déduire des questions 1°, 2°, 3° précédentes que, pour tout $n > 0$, $q(n) \leqslant 4^{n-1}$.

5° En utilisant (I, 4°, *b.*) et 4°, prouver l'existence de deux constantes strictement positives M_1 et M_2 telles que, pour tout entier $n > 1$, on ait :

$$M_1 \leqslant \frac{\log q(n)}{n} \leqslant M_2 .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail